第8講　挟んで極限

8

［A］ n が自然数とする．3次方程式

$$(*)\quad 2x^3+3nx^2-3(n+1)=0$$

について次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n の値にかかわらず方程式 $(*)$ は正の解をただ1つだけもつことを証明せよ．

(2) 方程式 $(*)$ の正の解を a_n とする．このとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［B］ a は $0<a<\pi$ を満たす定数とする．$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$n\pi<x<(n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a)=x\sin x$ を満たす x がただ1つ存在するので，この x の値を x_n とする．

(1) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-n\pi)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-n\pi)$ を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　挟んで極限

8　関数 $f(x)$ を $f(x)=x\sin x-\cos x$ で定める．また，n を自然数とする．

(1)　$2n\pi \leqq x \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$f(x)=0$ となる x がただ1つ存在することを示せ．

(2)　(1)での $f(x)=0$ となる x の値を a_n とする $\left(2n\pi \leqq a_n \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0$ を示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　挟んで極限

8

［A］ n が自然数とする．３次方程式

$$(*)\quad 2x^3+3nx^2-3(n+1)=0$$

について次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n の値にかかわらず方程式 $(*)$ は正の解をただ１つだけもつことを証明せよ．

(2) 方程式 $(*)$ の正の解を a_n とする．このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［B］ a は $0<a<\pi$ を満たす定数とする．$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$n\pi<x<(n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a)=x\sin x$ を満たす x がただ１つ存在するので，この x の値を x_n とする．

(1) 極限値 $\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} n(x_n-n\pi)$ を求めよ．

【答】 ［A］ (1) 略 (2) $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

［B］ (1) $\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)=0$ (2) $\lim_{n\to\infty} n(x_n-n\pi)=\dfrac{\sin a}{\pi}$

【解説】

［A］ (1) $f(x)=2x^3+3nx^2-3(n+1)$ とおくと，

$f'(x)=6x(x+n)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$-n$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となる．ここで

$$f(0)=-3(n+1)<0$$
$$f(2)=9n+13>0$$

より $(*)$ は $0<x<2$ にただ１つだけ正の解をもつ．

(2) $f(1)=-1<0$ より

$$1<a_n<2$$

ここで

$$2{a_n}^3+3n{a_n}^2-3(n+1)=0$$
$$\iff n\cdot 3(a_n+1)(a_n-1)=3-2{a_n}^3$$
$$\iff a_n-1=\frac{3-2{a_n}^3}{3(a_n+1)}\cdot\frac{1}{n}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\therefore \quad |a_n-1| = \left|\frac{3-2{a_n}^3}{3(a_n+1)}\right|\cdot\frac{1}{n}$$
$$\leqq \frac{13}{6}\cdot\frac{1}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}|a_n-1|=0$ より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

［B］(1)

$$\sin(x+a)=x\sin x$$
$$\iff \sin x\cos a+\cos x\sin a=x\sin x$$
$$\iff \cos a+\frac{\sin a}{\tan x}=x$$
$$\iff \frac{\sin a}{x-\cos a}=\tan x$$

より

$$\tan(x_n-n\pi)=\tan x_n$$
$$=\frac{\sin a}{x_n-\cos a} \quad \cdots\cdots①$$

ここで $n\pi<x_n<(n+1)\pi$ より $n\to\infty$ のとき $x_n\to\infty$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}\tan(x_n-n\pi)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a}{x_n-\cos a}=+0$$

ここで，$0<a<\pi$ より $\sin a>0$，$x_n>n\pi$，$|\cos a|\leqq 1$ より $\dfrac{\sin a}{x_n-\cos a}>0$ であることと，

$0<x_n-n\pi<\pi$ より

$$0<x_n-n\pi<\frac{\pi}{2}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)=0}$$

(2)　(1)より $0<x_n-n\pi<\dfrac{\pi}{2}$．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

であることを用い，①に注意すると，

$$\sin(x_n-n\pi)<x_n-n\pi<\tan(x_n-n\pi)$$
$$\iff \frac{\sin(x_n-n\pi+a)}{x_n}<x_n-n\pi<\frac{\sin a}{x_n-\cos a}$$
$$\iff \frac{\sin(x_n-n\pi+a)}{\frac{x_n}{n}}<n(x_n-n\pi)<\frac{\sin a}{\frac{x_n}{n}-\frac{\cos a}{n}}$$

ここで $\pi<\dfrac{x_n}{n}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\pi$ より　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=\pi$，

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_n-n\pi+a)}{\dfrac{x_n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a}{\dfrac{x_n}{n}-\dfrac{\cos a}{n}}=\frac{\sin a}{\pi}$$

であるので

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}n(x_n-n\pi)=\frac{\sin a}{\pi}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　挟んで極限

8　関数 $f(x)$ を $f(x)=x\sin x-\cos x$ で定める．また，n を自然数とする．

(1)　$2n\pi \leqq x \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$f(x)=0$ となる x がただ1つ存在することを示せ．

(2)　(1)での $f(x)=0$ となる x の値を a_n とする $\left(2n\pi \leqq a_n \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0$ を示せ．

【答】　略

【解説】

(1)

$$f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1-0>0$$

よって $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ は解とはならないので

$2n\pi \leqq x < 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ とすると，$2n\pi>0$ より

$$f(x)=0 \iff x\sin x-\cos x=0$$
$$\iff \tan x=\frac{1}{x}$$

ここで $y=\tan x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフは

$2n\pi < x < 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ にただ1つの共有点をもつので，その x 座標が求める解となる．

(2)　(1)より

$$f(a_n)=0 \iff \tan a_n=\frac{1}{a_n} \quad \cdots\cdots①$$

また

$$2n\pi < a_n < 2n\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\iff 0 < a_n-2n\pi < \frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots②$$

ここで

$$\tan(a_n-2n\pi)=\tan a_n$$
$$=\frac{1}{a_n} \quad (①より)$$

となるが，

$$2n\pi < a_n < 2n\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\iff \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2n\pi}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

これと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}=0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\tan(a_n-2n\pi)=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0\ （②より）$$

よって，示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。